DẠY HỌC HÀM SỐ MŨ QUA MỘT SỐ THÍ DỤ THỰC TIỄN

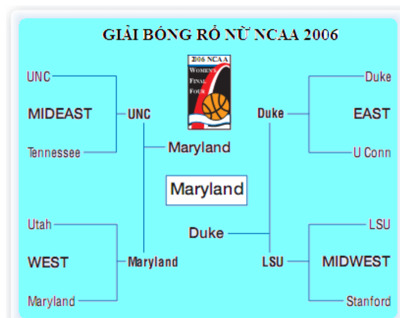
Nguồn gốc của toán học cũng như các ngành khoa học đều là các vấn đề thực tiễn mà loài người cần tìm hiểu để cải thiện cuộc sống. Vì thế việc sử dụng các thí dụ thực tiễn trong giảng dạy sẽ giúp học sinh hiểu rõ các định nghĩa, các quy luật và định lý. Các thí dụ thực tiễn còn tạo hứng thú cho học sinh đưa lớp học đến gần cuộc sống chung quanh hơn. Trong bài viết này tôi trình bày một số thí dụ thực tiễn có thể sử dụng khi dạy học sinh về hàm số mũ.

★**Thí dụ 1.** "Mooney" là một nhà điêu khắc. Một trong những tác phẩm đặc biệt của ông là khắc một cái kìm lớn trên cây. Từ tác phẩm ban đầu này ông đã khắc một cái kìm khác ngay trên mỗi quai cầm của cái kìm đầu tiên. Sau đó ông đã tạo thêm một cái kìm khác ngay trên mỗi quai cầm của cái kìm mới tạo thành. Ông sử dụng mô hình này để tạo ra cái kìm gốc và 8 chiếc kìm nhiều lớp. Một thực tế đáng ngạc nhiên hơn là tất cả những chiếc kìm này đều sử dụng được.

Số lượng cái kìm trên mỗi cấp được cho ở bảng sau:

Cấp	Số lượng kìm	Lũy thừa của 2
0	**1**	2^0
1	**1(2) = 2**	2^1
2	**2(2) = 4**	2^2
3	**2(2)(2) = 8**	2^3
4	**2(2)(2)(2) = 16**	2^4
5	**2(2)(2)(2)(2) = 32**	2^5
6	**2(2)(2)(2)(2)(2) = 64**	2^6
7	**2(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 128**	2^7
8	**2(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 256**	2^8

Nghiên cứu cột cuối cùng ở bảng trên. Chú ý rằng số mũ tương ứng với các cấp. Vì vậy, ta có thể viết một phương trình để mô tả số lượng kìm y với cấp x bất kì là $y = 2^x$. Nó thuộc lớp các hàm gọi là **hàm số mũ**, trong đó biến là số mũ.



★**Thí dụ 2.** Một giải vô địch bóng rổ nữ bắt đầu với 64 đội tham dự và trải qua 6 vòng chơi. Những đội chiến thắng ở vòng chơi đầu tiên sẽ tiếp tục thi đấu với nhau ở vòng chơi thứ hai. Số đội thắng chuyển từ 16 đến 8 đến 4 và cuối cùng tiến đến trận chung kết để giành chức vô địch. Số lượng các đội y thi đấu trong một giải đấu có x vòng đấu là $y = 2^x$.

★**Thí dụ 3. LĨNH VỰC ĐIỆN ẢNH** Giá vé xem phim giảm xuống sau mỗi dịp cuối tuần kể từ khi khởi chiếu. Hàm $E = 49.9 \cdot 0.692^w$ thể hiện doanh thu của một bộ phim thông thường. Trong phương trình này, E thể hiện số tiền kiếm được (triệu USD), w thể hiện số tuần.

a. Những giá trị nào của E và w là phù hợp với bài toán?

Chỉ có những giá trị $E \le 49.9$ và $w > 0$ là phù hợp với bài toán.

b. Bộ phim thu được bao nhiêu trong tuần đầu tiên?

$E = 49.9 \cdot 0.692^w$ Phương trình gốc

$= 49.9 \cdot 0.692^1$ $w = 1$

$= 34.5308$

Như vậy, trong tuần đầu tiên, rạp chiếu phim thu được khoảng 34.53 triệu USD.

c. Trong tuần thứ năm bộ phim thu được bao nhiêu?

$E = 49.9 \cdot 0.692^w$ Phương trình gốc

$= 49.9 \cdot 0.692^5$ $w = 5$

≈ 7.918282973

Như vậy, trong tuần thứ năm, rạp chiếu phim thu được khoảng 7.92 triệu USD.

★**Thí dụ 4.** Tốc độ tăng hàng tháng của số lượng "blog" (nhật ký cá nhân) từ tháng 11-2003 đến tháng 7-2005 là 13.7%. Giả sử y là tổng số trang "blog" (đơn vị tính: triệu), và t là số tháng tính từ tháng 11-2003. Khi đó số lượng "blog" trung bình mỗi tháng có thể được mô phỏng bởi: $y = 1.1(1+0.137)^t$ hay $y = 1.1(1.137)^t$.

Phương trình chỉ số lượng trang "blog" có dạng: $y = C(1+r)^t$. Đây là phương trình tổng quát của tăng trưởng mũ, trong đó: C là số lượng ban đầu, tăng với cùng tỉ lệ phần trăm qua một khoảng thời gian được cho.

★**Thí dụ 5.** Năm 1971, ở một trường thể thao có 294,105 học sinh nữ. Sau đó, số lượng này tăng trung bình 8.5% mỗi năm.

a. Viết phương trình biểu diễn số học sinh nữ ở trường thể thao từ năm 1971.

$y = C(1+r)^t$ Phương trình tổng quát

$= 294{,}105(1+0.085)^t$ $C = 294{,}105$ và $r = 8.5\%$ hay 0.085.

$= 294{,}105(1.085)^t$

Phương trình biểu diễn số học sinh nữ tham gia học ở trường thể thao là $y = 294{,}105(1.085)^t$, trong đó y là số học sinh nữ và t là số năm tính từ năm 1971.

b. Từ phương trình trên, có bao nhiêu học sinh nữ học ở trường thể thao này vào năm 2005?

$y = 294{,}105(1.085)^t$ Phương trình biểu diễn số học sinh nữ của trường

$= 294{,}105(1.085)^{34}$ $t = 2005 - 1971$ hay $t = 34$

$\approx 4{,}711{,}004$

Vậy, năm 2005 đã có 4,711,004 học sinh nữ học ở trường thể thao này.

★**Thí dụ 6.** Một tấm phao bơi được bơm đầy bị giảm 6.6% không khí mỗi ngày. Ban đầu tấm phao bơi này chứa 4500 m^3 không khí.

a. Viết phương trình biểu diễn sự giảm không khí.

$y = C(1-r)^t$ Phương trình tổng quát

$= 4{,}500(1-0.066)^t$ $C = 4{,}500$ *v*à $r = 6.6\%$

$= 4{,}500(0.934)^t$

Phương trình biểu diễn sự giảm không khí là $y = 4{,}500(0.934)^t$, trong đó y là lượng không khí chứa trong tấm phao bơi (đơn vị tính: m^3) và t là số ngày.

b. Ước tính lượng không khí bị giảm đi sau 7 ngày.

$y = 4{,}500(0.934)^t$ Phương trình cho sự giảm không khí

$= 4{,}500(0.934)^7$ $t = 7$

$\approx 2{,}790$

Như vậy, lượng không khí giảm đi sau 7 ngày là 2,790 m^3.

★**Thí dụ 7.** Năm 2000, dân số của Phoenix là 1,321,045 người, và năm 2004 tăng lên tới 1,331,391 người**.**

a. Viết một hàm số mũ dạng $y=ab^x$ để biểu diễn dân số y của Phoenix, với x là số năm kể từ năm 2000.

Vào năm 2000, x bằng 0, và y bằng 1,321,045. Do đó giá trị của a là 1,321,045.

Hướng dẫn Năm 2004, x bằng 4, và y bằng 1,331,391. Thay các giá trị này và giá trị của a vào hàm số mũ để tìm giá trị gần đúng của b.

Giải $y = ab^x$ Hàm số mũ .

$1{,}331{,}391 = 1{,}321{,}045b^4$ Thay $x = 4, y = 1{,}331{,}391$, *v*à $a = 1{,}321{,}045$.

$b \approx 1.002$

Một phương trình dùng để thể hiện sự tăng trưởng dân số của Phoenix từ năm 2000 đến năm 2004 là $y = 1{,}321{,}045(1.002)^x$.

b. Giả sử dân số Phoenix tiếp tục tăng với cùng một tốc độ. Hãy dự đoán dân số của Phoenix vào năm 2017.

Đối với năm 2017, thời gian x bằng 17

$y = 1.321.045(1,002)^x$ Phương trình gốc.

$= 1.321.045(1.002)^{17}$ Thế x bằng 17.

$\approx 1.366.686$

Năm 2017 dân số của Phoenix sẽ là 1.366.686 người.

★Thí dụ 8. Một tách cà phê chứa 130 mg caphein. Nếu caphein được loại bỏ khỏi cơ thể với một tốc độ 11% mỗi giờ, sau bao lâu một nửa lượng caphein trên được loại bỏ?

Hướng dẫn Sử dụng công thức $y=a(1-r)^t$, với t là số giờ kể từ lúc uống cà phê. Lượng caphein còn lại y là một nửa của 130 hay là 65.

Giải

$y = a(1-r)^t$	Công thức suy giảm mũ
$65 = 130(1-0.11)^t$	Thế $y = 65,\ a = 130,\ r = 11\%$
$0.5 = (0.89)^t$	Chia hai vế cho 130
$\log 0.5 = \log(0.89)^t$	Lấy logarit 2 vế
$\log 0.5 = t\log(0.89)$	Tính chất lũy thừa của logarit
$5.948 \approx t$	

Vậy, sẽ mất khoảng 6 giờ để một nửa lượng caphein được loại bỏ.

Kiểm tra kết quả. Sử dụng công thức suy giảm mũ để tìm lượng caphein còn lại sau 6 giờ nếu lượng caphein ban đầu là 130mg.

$y = a(1-r)^t$	Công thức suy giảm mũ
$= 130(1-0.11)^6$	Thay $a = 130,\ r = 0$ và $t = 6$
≈ 64.6	

Một nửa của 130 là 65, do đó câu trả lời là hợp lý. Một nửa lượng caphêin sẽ được loại bỏ khỏi cơ thể trong khoảng 6 giờ.

★Thí dụ 9. Công thức suy giảm mũ dạng $y = ae^{-kt}$

HÓA THẠCH HỌC *Chu kì bán rã* của một chất phóng xạ là thời gian cần thiết để một nửa lượng chất phóng xạ phân rã. Tất cả sự sống trên Trái đất đều chứa Cacbon-14, nó phân rã liên tục với một tốc độ không đổi. Chu kì bán rã của Carbon-14 là 5760 năm, nghĩa là, cứ sau 5760 năm thì lượng Carbon-14 trong mẫu vật chỉ còn lại một nửa.

a. Tìm giá trị k và phương trình biểu diễn sự phân rã của Carbon-14?

Giả sử a là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ. Khối lượng y còn lại sau 5760 năm được biểu diễn bởi $\frac{1}{2}a$ hoặc $0.5a$.

$y = ae^{-kt}$	Phương trình suy giảm mũ
$0.5a = ae^{-k5760}$	Thế $y = 0.5a$ và $t = 5760$
$0.5 = e^{-k5760}$	Chia hai vế cho a
$\ln 0.5 = \ln e^{-k5760}$	Lấy ln hai vế
$\ln 0.5 = -5760k$	Tính chất của hàm mũ và logarit
$0.00012 \approx k$	Đơn giản

Giá trị của k là 0.00012. Như vậy, phương trình biểu diễn sự phân rã của Carbon-14 là $y = ae^{-0.00012t}$, trong đó t được tính bằng năm.

Kiểm tra kết quả. Sử dụng công thức suy giảm mũ để tìm khối lượng Carbon-14 của mẫu vật còn lại sau 5760 năm. Lấy khối lượng ban đầu là 1.

$y = ae^{-0.00012t}$	Phương trình gốc
$= 1e^{-0.00012(5760)}$	$a = 1$ và t = 5760

≈ 0.501

Còn lại khoảng một nửa khối lượng. Câu trả lời đã được kiểm tra.

b. Một nhà cổ sinh vật học nghiên cứu xương của voi ma mút lông mịn đã chết và ước tính rằng xương chỉ chứa 3% lượng Carbon-14 so với khi con vật còn sống. Con voi ma mút này chết cách đây bao lâu?

Giả sử a là lượng Carbon-14 ban đầu trong cơ thể con vật. Khi đó lượng còn lại y sau t năm là 3% a hay 0.03a.

$y = ae^{-0.00012t}$	Phương trình suy giảm của Carbon-14
$0.03a = ae^{-0.00012t}$	Thay y bằng $0.03a$.
$0.03 = e^{-0.00012t}$	Chia 2 vế cho a
$\ln 0.03 = \ln e^{-0.00012t}$	Lấy logarit 2 vế
$\ln 0.03 = -0.00012t$	Tính chất nghịch đảo của hàm mũ và hàm logarit
$29,221 \approx t$	

Như vậy, con voi ma mút đã chết cách đây khoảng 29,000 năm.

★**Thí dụ 10.** Năm 2005, Trung Quốc là nước đông dân nhất thế giới, với dân số ước tính là 1.31 triệu người. Đất nước đông dân thứ hai là Ấn Độ, với 1.08 triệu người. Dân số của Ấn Độ và Trung Quốc có thể được biểu diễn tương ứng bởi các hàm số I(t)=$1.08e^{0.0103t}$ và C(t)=$1.31^{e0.0038t}$. Theo các hàm số này, khi nào dân số Ấn Độ nhiều hơn dân số Trung Quốc?

Ta muốn tìm t (tính bằng năm) để I(t)>C(t).

$I(t) > C(t)$	
$1.08e^{0.0103t} > 1.31e^{0.0038t}$	Thay $I(t)$ bằng $1.08e^{0.0103t}$ và $C(t)$ bằng $1.31e^{0.0038t}$.
$\ln 1.08e^{0.0103t} > \ln 1.31e^{0.0038t}$	Lấy ln 2 vế
$\ln 1.08 + \ln e^{0.0103t} > \ln 1.31 + \ln e^{0.0038t}$	Tính chất nhân của hàm logarit
$\ln 1.08 + 0.0103t > \ln 1.31 + 0.0038t$	Tính chất nghịch đảo của hàm mũ và hàm logarit
$0.0065t > \ln\ 1.31 - \ln\ 1.08$	Trừ 2 vế cho $0.0038t$
$t > \dfrac{\ln 1.31 - \ln 1.08}{0.0065}$	Chia 2 vế cho 0.0065
$t > 29.7$	

Như vậy, sau 30 năm, tức là vào năm 2035 thì Ấn Độ trở thành nước đông dân nhất.
